Apresentação do curso

O intuito deste texto é dar informações gerais sobre o curso de Cálculo Diferencial e Integral, deixando claros nossos objetivos.

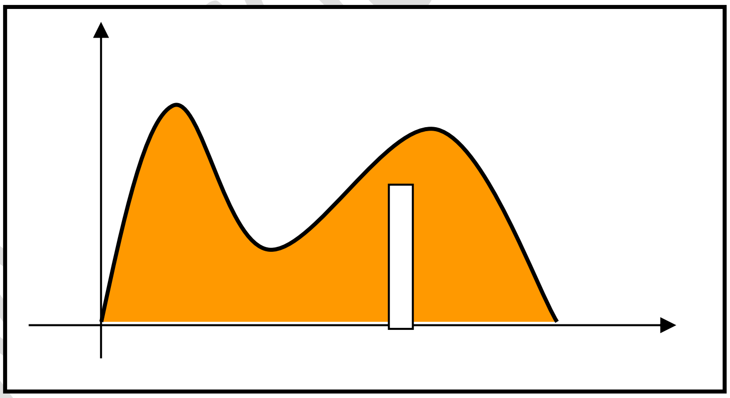
É importante ressaltar, de início, que o programa do curso é extenso e, portanto, será imprescindível que vocês dediquem algumas horas por semana para estudar Cálculo, refletindo sobre os conceitos apresentados e resolvendo os problemas que serão propostos.

Esperamos que vocês não só aprendam bastante, como gostem do curso. Um bom semestre a todos!

O que é Cálculo Diferencial e Integral?

O Cálculo Diferencial e Integral é um ramo da Matemática diferente dos outros que você já aprendeu até aqui, pois ele é dinâmico: estuda movimentos, variações, quantidades que mudam, tendendo a outras quantidades.

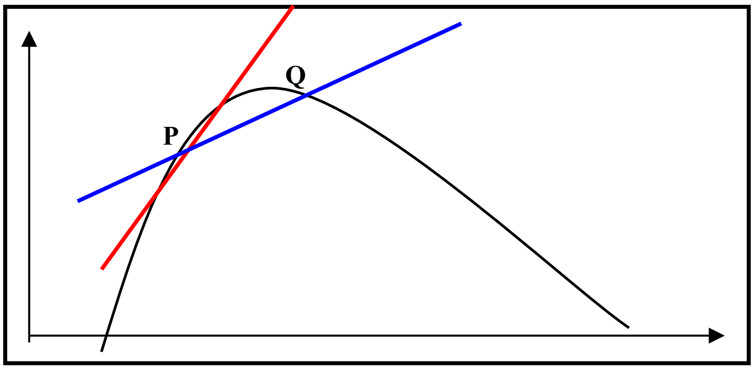
As ideias principais que formam a base do Cálculo foram acontecendo através de vários séculos. Os primeiros passos foram dados pelos gregos antigos, que desenvolveram métodos de aproximação para o cálculo de áreas de regiões limitadas por curvas. Arquimedes (287 – 212 a.C.) determinou a área compreendida por uma parábola e uma reta somando as áreas de infinitos triângulos inscritos na região. O problema de área de regiões delimitadas por curvas é estudado no ramo do Cálculo chamado Cálculo Integral.



No século XVII, o jurista francês Pierre de Fermat, que se dedicava á Matemática nas horas vagas, foi um dos pioneiros no estudo de funções e criou um método de achar valores máximo e mínimo de uma função procurando os pontos do gráfico nos quais a reta tangente é horizontal. Os ingleses Isaac Barrow, John Wallis, Isaac Newton e o alemão Gottfried Leibniz fizeram importantes contribuições ao estudo de Fermat ao estudarem o "problema da tangente".

Para se obter a equação da reta tangente a um gráfico num certo ponto P, o difícil é encontrar a inclinação da reta.

Como resolver o problema? A idéia (de Barrow) foi a de calcular a inclinação de uma reta que corta o gráfico em dois pontos P e Q. Depois, fazendo Q aproximar-se de P, a reta PQ, secante ao gráfico, aproxima-se da reta tangente ao gráfico em P. O valor da inclinação procurada é assim o *limite* dos valores das inclinações das secantes, quando Q se aproxima de P. O problema da tangente faz parte do que é chamado hoje de Cálculo Diferencial.



Os dois ramos do Cálculo e seus problemas motivadores (o problema da área e o da tangente) parecem ser de natureza completamente diferente. Newton percebeu que, na verdade, eles estão estreitamente relacionados. Isto você verá quando estudarmos em Matemática II o ***Teorema Fundamental do Cálculo***.

O que há em comum nos dois ramos do Cálculo é a noção de limite: em cada caso acima descrito, o problema consiste em calcular certa quantidade fazendo aproximações por outras quantidades mais fáceis de serem calculadas.

Newton ajudou a desenvolver o Cálculo motivado pelo estudo do movimento dos planetas em torno do Sol. Com o passar do tempo, muitas outras descobertas aconteceram, novos problemas foram sendo resolvidos pelos mesmos métodos, e novas aplicações foram sendo percebidas. Hoje em dia, o Cálculo é usado para achar órbitas de satélites, estimar o crescimento populacional (de pessoas, bactérias, ou de qualquer outro ser vivo), calcular a inflação (que mede a variação dos preços num certo período), e muitos outros problemas interessantes e úteis. Questões importantes de otimização são resolvidas com conhecimentos de Cálculo.

Assim, o Cálculo Diferencial e Integral é hoje considerado um instrumento indispensável de pensamento em quase todos os campos da ciência pura e aplicada: em Física, Química, Biologia, Astronomia, Engenharia, Economia e até mesmo em algumas Ciências Sociais, além de áreas da própria Matemática. Os métodos e as aplicações do Cálculo estão entre as maiores realizações intelectuais da civilização, uma conquista cultural e social, e não apenas científica.

Resumo do conteúdo

Funções. Noção intuitiva de limite. Continuidade. Derivadas: definição, interpretações geométrica e física, regras de derivação e regra da cadeia. Aplicações das derivadas: taxa de variação e problemas de otimização. A integral de Riemann e o Teorema Fundamental do Cálculo. Cálculo de áreas e volume de sólidos. Aplicações da Integral. Técnicas de integração.

Listas de Exercícios

Periodicamente serão divulgadas no site www.rodrigues.mat.br as listas de exercícios do curso. Esses exercícios devem dar uma ideia do tipo e nível de problemas que vocês deverão estar preparados para resolver. Recomendamos fortemente que cada um de vocês tente, num primeiro momento, resolver sozinhos esses exercícios, pois só assim poderá perceber suas dificuldades. Acreditamos que para um bom desempenho no curso, cada aluno deva participar ativamente das aulas, estudar regularmente e resolver muitos problemas e exercícios. Ler soluções prontas pode dar uma sensação falsa de saber. Tente resolver os problemas propostos e, caso não consiga, procure seu professor.

Bibliografia

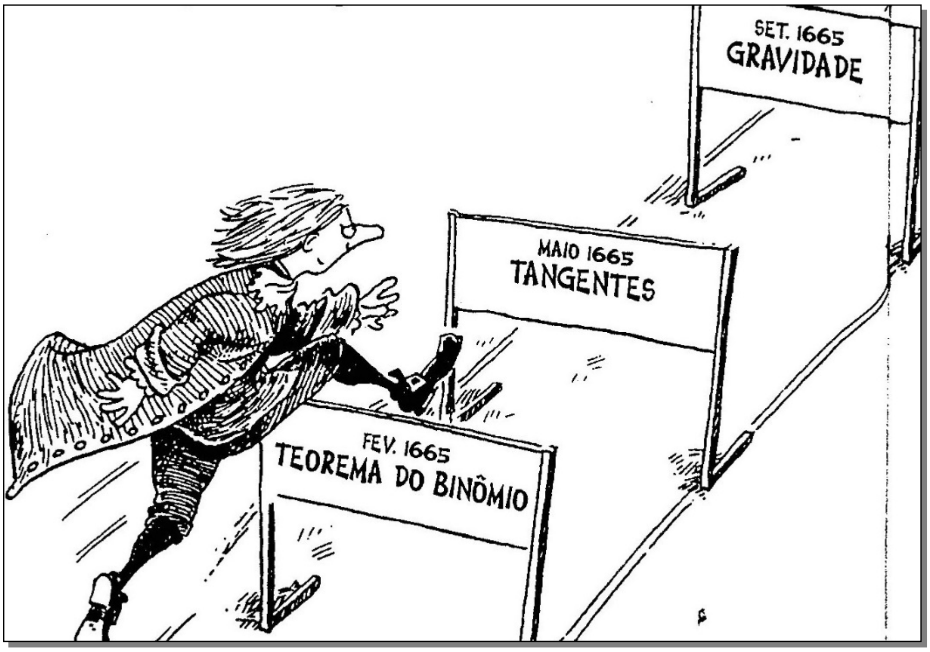
Como fonte de pesquisa para seus estudos você pode consultar um dos livros apresentados na bibliografia básica ou complementar do programa de ensino, ou ainda para aprofundar seus conhecimentos você pode consultar qualquer livro de Cálculo Diferencial. Segue abaixo algumas sugestões de leitura.

Flemming D. M.; Gonçalves M. B. **Cálculo A**. 6ª Edição. Pearson, 2009

Hughes – Hallett et al. **Cálculo Aplicado**. 2ª Edição. LTC. Rio de Janeiro, 2005

STEWART, J. Cálculo. 6° Ed. V.1. São Paulo: Cengage Learning, 2010

Curiosidade: Por que Isaac Newton é um morto de fama?

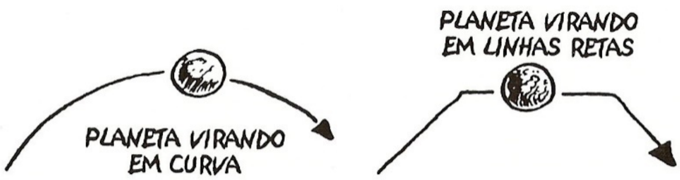


Foram inúmeras as descobertas de Newton na área da Física e Matemática. Mas vejamos abaixo como foi que Newton, em maio de 1665, se entendeu com as tangentes.

Uma tangente é uma linha reta que "toca" uma curva num ponto. Eis algumas:

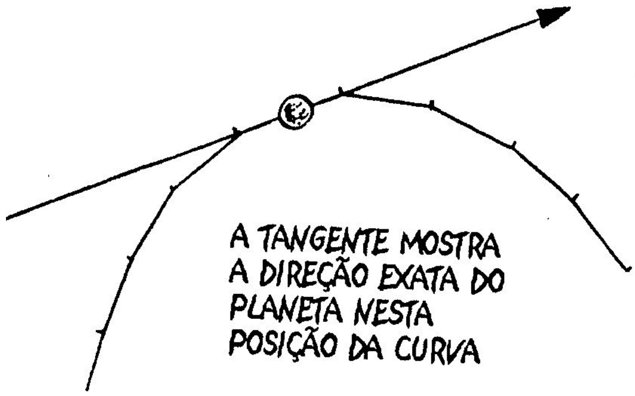
Mas qual é a importância das tangentes?

Na época, todo mundo estava estudando a Lua, os planetas e suas trajetórias. O velho Aristóteles, ao dizer que "tudo busca o seu devido lugar", não ajudava nada. Os astrônomos passavam horas e horas desenhando as trajetórias curvas dos planetas no papel. Tinham a esperança de que, se pudessem descrever com equações matemáticas exatamente como os planetas se moviam, poderiam entender o que os levava a se mover. Newton observando um planeta percebeu que ele se move na tangente de uma curva. Para facilitar, pense que em vez do planeta virar gradualmente em curva, ele virasse percorrendo uma série de linhas retas, como indicado na figura abaixo:



É claro que, se o planeta se move ao longo de cada linha reta, sua direção é, em cada uma, a direção da própria reta. Assim para tornar a trajetória do planeta mais parecida com uma curva, é só usarmos um "montão" de segmentos de retos bem "curtinhos".

Você pode fazer (imaginar) as retas ficarem cada vez mais curtas, e aí (no limite) a trajetória do planeta será uma curva perfeita – mas o caso é que, mesmo que suas linhas sejam minúsculas, elas continuarão sendo segmento de retas. Assim para ver exatamente em que direção o planeta se move em qualquer instante, é só "esticar" o minúsculo segmento de reta em que ele se encontra e ABRACADABRA... você tem uma tangente!



Essa observação levou Newton à sua grande descoberta, um método para determinar a reta tangente a uma curva num ponto dado. Esse método foi batizado por Newton como método das *fluxões* e hoje é conhecido como o terrível ***Cálculo Diferencial***.

Para saber mais...

Poskitt, Kjartan. **Issac Newton e sua maçã.** Cia.das Letras. São Paulo, 20

A IMPORTÂNCIA DO C.D.I. NA DESCRIÇÃO E RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

A Matemática é uma ciência que possui poderosas ferramentas que são utilizadas para a compreensão e descrição das leis que regem a Natureza e o Universo. O Cálculo Diferencial e Integral (C.D.I.) é uma dessas importantes ferramentas e foi desenvolvida por Isaac Newton entre os séculos XVI e XVII para resolver problemas de Física e Astronomia. Na mesma época da invenção de Newton, o matemático alemão Gottfried W. Leibniz, de forma independente, também foi responsável pelo desenvolvimento C.D.I. com a vantagem de ter inventado uma notação que é utilizada até os dias de hoje.

Com o C.D.I. podemos resolver problemas relacionados aos conceitos de derivação e integração. Os problemas relacionados com a derivação são aqueles que envolvem variações ou mudanças, como por exemplo a velocidade de propagação de uma epidemia, comportamentos econômicos, a deflexão de uma viga, a variação da corrente em um circuito elétrico etc. Já, dentre os problemas relativos ao conceito de integração destacam-se o cálculo de área, volume, massa, carga elétrica, trabalho realizado por uma partícula e outros.

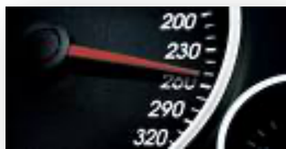
A seguir temos alguns exemplos que ilustram a importância do Cálculo Diferencial e Integral na resolução e descrição de problemas das Engenharias Civil, Elétrica, Mecânica, Produção, Física e Química.

Problema 1 (Cinemática). A função horária que fornece a posição de um carro é dada por $S = 60 + 4t + 6t^3$, onde S é dado em km e t em horas.

a) Utilizando a função anterior, complete a tabela abaixo:

Tempo (h)	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**
Posição (km)	60	70	116	234	460

b) Utilizando a tabela anterior calcule a **velocidade escalar média** desse carro entre os instantes $t = 1$ h e $t = 3$ h. (v = 82 km/h)

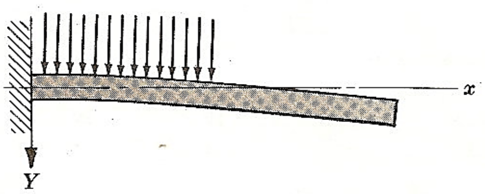


c) Qual seria a **velocidade** desse carro em $t = 1$ h?

A velocidade escalar instantânea, ou seja, aquela que aparece no mostrador do velocímetro do carro, é obtida com base no conceito de velocidade escalar média, calculada em um intervalo de tempo que tende a um instante, ou seja, fazendo Δt tender a zero. Em notação matemática escrevemos:

$$\boxed{v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{dS}{dt}}$$

Problema 2. (Engenharia Civil) Uma viga está fixa na extremidade $x = 0$ e livre na extremidade $x = 2$. Ela suporta uma carga que, por unidade de comprimento é dada por: $W(x) = \begin{cases} W_o \; se \; 0 < x < 1 \\ 0 \; se \; 1 < x < 2 \end{cases}$



Calcule a deflexão transversal $Y(x)$ no ponto x sabendo-se que:

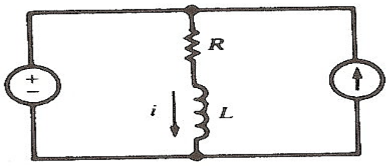
Função

$$\frac{d^4Y}{dx^4} = \frac{w(x)}{E.I}$$

Derivada Sucessiva

sendo E uma constante de elasticidade da viga e I o momento de inércia.

Problema 3. (Engenharia Elétrica) Considere um circuito RL. Sabendo-se que R = 5 Ω, L = 0,0025 H e que em $t = 0$, quando a corrente no circuito é de 2 A, uma fonte de 50 V é aplicada, determine a corrente $i(t)$.

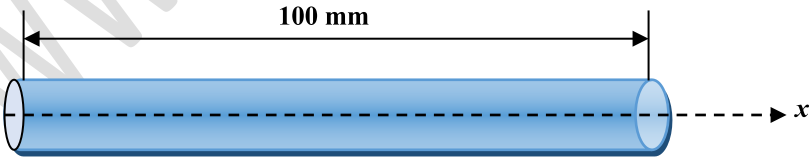


A solução desse problema depende da solução da seguinte equação diferencial:

$$R.i(t) + L.\frac{di}{dt} = \boldsymbol{v}$$

Função **Derivada**

Problema 4. (Engenharia Mecânica) O cilindro abaixo é isolado nas laterais (o que faz com que o calor flua unicamente ao longo do eixo x) e constituído de um material maciço. Determine a temperatura a 60 mm da origem O. Dados: A = 10^{-4} m^2 (área por onde flui o calor), Q = - 20 W (taxa de transferência de calor), K = 400/(1 – x) (coeficiente de condutividade térmica) e $T(0)$ = 283 K (temperatura na origem).



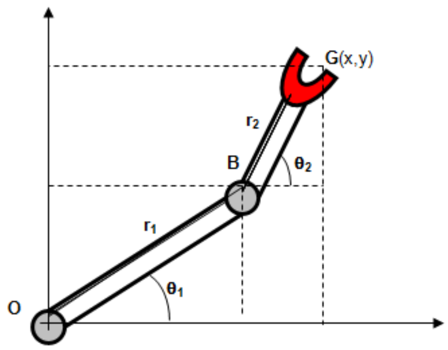
Segundo a Lei de Fourier a temperatura em cada ponto x do cilindro é uma função T que obedece a seguinte lei:

$$\boxed{\mathbf{Q = -K.A.}\frac{\boldsymbol{dT}}{\boldsymbol{dx}}}$$

Derivada

Lei de Fourier

O próximo exemplo é inspirado na **robótica**, a ciência que estuda o projeto e operação de robôs industriais. O modelo apresentado é mais simples que os modelos utilizados na prática, que envolvem o uso de várias articulações em um espaço tridimensional, mas serve para ilustrar os princípios básicos envolvidos bem como, a importância de alguns conceitos fundamentais da matemática: estudo de funções, trigonometria, geometria analítica, derivadas e outros.

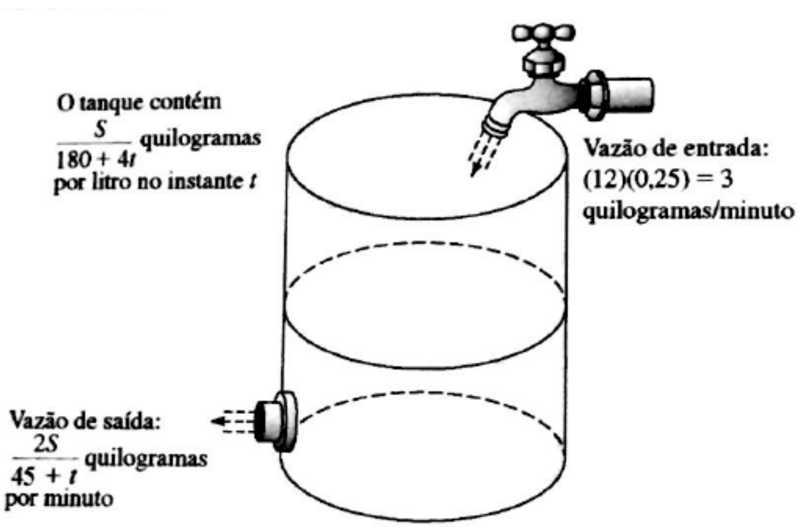


Problema 5 (TAI). A figura anterior mostra um braço robótico bidimensional com duas articulações, fixado no ponto O e com um "cotovelo" no ponto B. Os comprimentos das duas hastes, r_1 e r_2 são fixos. Os ângulos θ_1 e θ_2 podem ser controlados pelo operador ou por um programa de computador. A peça conectada no ponto G, denominada garra, é que faz o trabalho. (Essa peça pode ser, por exemplo, uma furadeira ou um dispositivo de soldagem). Supondo $r_1 = 1$ m, $r_2 = 1{,}5$ m, $\theta_1 = 0{,}02t$ e $\theta_2 = 0{,}01t$ determine:

a) As coordenadas da garra G em função do tempo *t*.

b) A posição e velocidade da garra no instante t = 10s.

Problema 6 (QUÍMICA) Um tanque de 280 litros contém inicialmente 10 kg de sal dissolvidos em 180 litros de água. Suponha que 12 litros de salmoura contendo 0,25 kg/litro são despejados no tanque por minuto e que a mistura seja retirada do tanque à taxa de 8 litros/minuto. Determine e resolva a ***equação diferencial*** para a massa de sal presente no tanque em ***função*** do tempo t.



A solução desses problemas envolve desde conceitos básicos de matemática até os mais elaborados como o conceito de **FUNÇÃO, DERIVADAS** E **INTEGRAIS**.