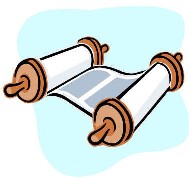
3ª Lista de Exercícios – Derivadas Elementares: Cálculo e Aplicações



Vimos que sendo $y = f(x)$, a **derivada** de f em relação a variável *x*, é uma nova função denotada por $f'(x)$ ou $\frac{df}{dx}$ e definida da seguinte forma:

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}}$$

O cálculo da derivada utilizando a definição anterior se torna muito trabalhoso, assim segue diretamente da definição e das propriedades de limites as seguintes **regras de derivação**:

R1. A derivada da função constante: se $f(x) = c$ então $f'(x) = 0$.

R2. A derivada da função identidade: se $f(x) = x$ então $f'(x) = 1$.

R3. A derivada da potência: se $f(x) = x^n$, onde n é um número real, então $f'(x) = n.x^{n-1}$.

R4. Múltiplo constante: sendo c uma constante e *f* uma função diferenciável temos $(c.f)' = c.f'$.

R5. Soma e diferença de funções: sendo *f* e *g* duas funções diferenciáveis temos $(f \pm g)' = f' \pm g'$.

Questão 01. Calcule a derivada das funções abaixo aplicando as regras básicas de diferenciação.

a) $y = 3$

b) $f(x) = 3x + 1$

c) $S = t^2 + 3$

d) $f(t) = -3t^2 + 2t - 4$

e) $s(t) = t^3 - 2t + 4$

f) $y = 4x^{2/3}$

g) $f(x) = 4\sqrt{x}$

h) $p = \frac{4}{t^2} + 2t^2$

i) $f(x) = -2$

j) $s(t) = 4\sqrt[3]{t} + 2$

k) $w = 4t^{-1} + t$

l) $y = \frac{2}{3x^3}$

m) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x}}$

n) $w = \frac{1}{t}$

o) $F = kx$ onde k é uma constante

Geometricamente, vimos que $f'(x_o)$ representa o ***coeficiente angular*** da reta tangente ao gráfico de *f* no ponto de abscissa $x = x_o$, assim também podemos definir que $f'(x_o)$ representa a inclinação do gráfico de *f* no ponto $(x_o, f(x_o))$.

Questão 02. Ache uma equação da reta tangente ao gráfico de *f* no ponto indicado. Verifique então seu resultado esboçando o gráfico de *f* e da reta tangente.

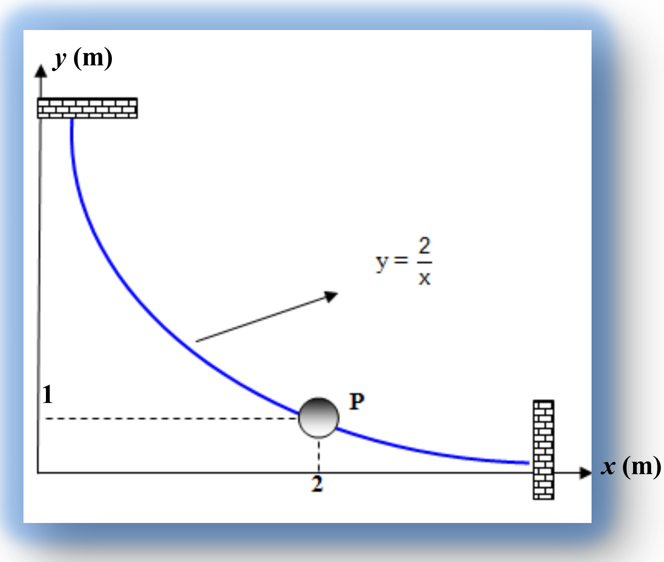
Função	Ponto de tangência
a) $y = x^2 - 4x$	P(3, -3)
b) $f(x) = \sqrt{x}$	P(4, 2)

Definindo a velocidade média de um corpo como sendo $\frac{\Delta S}{\Delta t}$, onde ΔS representa a variação do espaço e Δt a variação do tempo, vimos que a velocidade instantânea pode ser definida da seguinte forma: $v = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{dS}{dt}$.

Agora, admitindo que a aceleração represente uma taxa de variação da velocidade, podemos definir a aceleração instantânea de um corpo como sendo a = $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}$

Questão 03. A posição de um corpo no instante t é dada por $S = 3t^3 + 4t^2 - t + 3$, onde t é dado em segundos e S em metros. Determine a velocidade e a aceleração desse corpo no instante $t = 1$s.

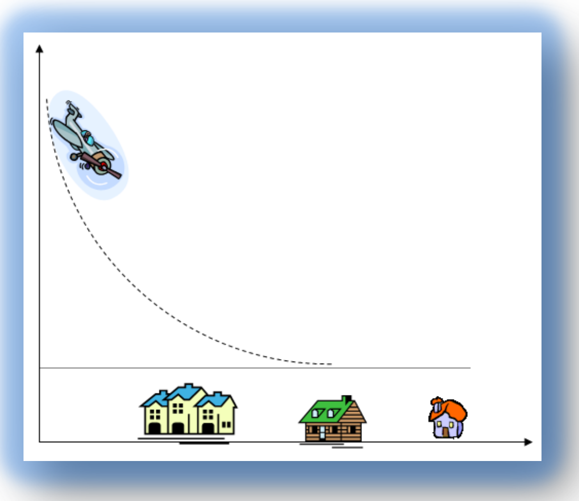
Questão 04. Um corpo desliza de A para B vinculado a um arame como mostra a figura abaixo. A velocidade é constante durante o movimento. Nessas condições sabe-se que sua aceleração em P é normal a trajetória no sentido do centro de curvatura. Determine o ângulo que a aceleração faz com o eixo vertical.



Questão 05. Num determinado jogo de videogame, os aviões voam da esquerda para a direita segundo a trajetória $y = 1 + \frac{1}{x}$ e podem disparar suas balas na direção da reta tangente contra os alvos localizados ao longo do eixo x em x = 1, 2, 3, 4 e 5. Determine se algum alvo será atingido se o avião disparar um projétil quando estiver em:

a) P(1, 2)

b) Q($\frac{3}{2}, \frac{5}{3}$)



GABARITO PARCIAL

Questão 01.

a) $y' = 0$

b) $f'(x) = 3$

c) $\dfrac{dS}{dt} = 2t$

d) $f'(x) = -6t + 2$

e) $S' = 3t^2 - 2$

f) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{8}{3}x^{-1/3}$

g) $f(x) = 4\sqrt{x} \Rightarrow f(x) = 4.x^{\frac{1}{2}}$

$f'(x) = 2.x^{-1/2}$

h) $p = \dfrac{4}{t^2} + 2t^2 \Rightarrow p = 4.t^{-2} + 2t^2$

$\dfrac{dp}{dt} = -8.t^{-3} + 4t \Rightarrow \dfrac{dp}{dt} = -\dfrac{8}{t^3} + 4t$

i) $f'(x) = 0$

j) $s(t) = 4\sqrt[3]{t} + 2 \Rightarrow s(t) = 4t^{1/3} + 2$

$s' = \dfrac{4}{3}t^{-2/3} = \dfrac{4}{3.t^{2/3}} \Rightarrow s' = \dfrac{4}{3\sqrt[3]{t^2}}$

k) $w' = -4t^{-2} + 1$

l) $y = \dfrac{2}{3x^3} \Rightarrow y = \dfrac{2}{3}.x^{-3}$

$y' = -2.x^{-4} \Rightarrow y' = -\dfrac{2}{x^4}$

m) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x}} \Rightarrow f(x) = \dfrac{x}{x^{1/2}} = x.x^{-1/2}$

$f(x) = x^{1/2} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{2}x^{-1/2} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

n) $w = \dfrac{1}{t} \Rightarrow w = t^{-1}$

$w' = -1.t^{-2} \Rightarrow w' = -\dfrac{1}{t^2}$

o) $F' = k$

Questão 02.

a) y = 2x – 9

b) y = 0,25x + 1

Questão 03. v = 16 m/s e a = 26 m/s^2

Questão 04. 153,27°

Questão 05. O alvo atingido quanto o avião estiver em P(1, 2) será em x = 3.